$L: V \to W$ lin. dönüşüm;

$\text{çek } L \subseteq V$ alt uzay

$L(V) \subseteq W$ alt uzay

$\text{boy çek}(L) + \text{boy } L(V) = \text{boy}(V)$

Sonuç: Eğer $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm ve boy V = boy $W = n$ ise;

1) L nin 1-1 olması, örten olmasını
2) L nin örten olması, 1-1 olmasını

gerektirir.

İspat:

$$\text{boy çek}(L) + \text{boy } L(V) = \text{boy } V$$

$$(1) \xrightarrow{L \text{ 1-1}} \quad 0 + \text{boy } L(V) = n$$

$$\text{boy } L(V) = n = \text{boy}(W)$$

L örten olur.

$$(2) \xrightarrow{L \text{ örten}} \quad \underbrace{\text{boy çek} L}_{0} + n = n$$

$$\text{çek}(L) = \{\vec{0}_V\}$$ L birebir olur.

Tanım: $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

Eğer $L^{-1}: W \to V$ fonksiyonu

$$L \circ L^{-1} = I_W \quad , \quad \text{ve}$$

$$L^{-1} \circ L = I_V$$

sağlıyorsa L^{-1}'e L nin tersi denir.

L nin tersi varsa L'ye tersinir lineer dönüşüm denir.

Teorem: $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

1) L'nin tersinir olması için gerek ve yeter şart L nin $1-1$ ve örten olmasıdır.

3) $(L^{-1})^{-1} = L$ dir.

2) L^{-1} lineerdir.

İspat: 1 $\Rightarrow$ L nin tersi olsun.

Bir $L^{-1} : W \to V$ var ve $L \circ L^{-1} = I_W$

ve $L^{-1} \circ L = I_V$ yi sağlasın.

L $1-1$ dir: $L^{-1}(u) = L^{-1}(v)$; ($u, v \in W$ için)

ise

$$\underbrace{L \circ L^{-1}}(u) = \underbrace{L \circ L^{-1}}(v)$$

$$I_W(u) = I_W(v)$$

$$u = v \quad \Rightarrow L^{-1} \ 1-1 \ \checkmark$$

L örtendir: Her $w \in W$ için

$L(v) = w$ (olacak şekilde $v \in V$ var?)

$L^{-1}(w) = u$ olsun.

$$\underbrace{L \circ L^{-1}}_{I_W}(w) = L(u)$$

$w = L(u)$ ($v = u$ alırız)

L örtendir.

L^{-1} in tekliği: $L^{-1}: W \to V$ L nin tersi

ve aynı şartları sağlayan bir $H: W \to V$

olsun: $L \circ H = I_W$ ve $H \circ L = I_V$

sağlasın.

Hedef: $L^{-1} \equiv H$ gösterilmeli.

Her $w \in W$ için $L^{-1}(w) = H(w)$ olmalı.

$w \in W$ alalım. $\underbrace{L(H(w))}_{I_W(w)} = L(L^{-1}(w))$

sağlanır. $I_W(w) = I_W(w)$

$w = w$

$L(\underbrace{H(w)}) = L(\underbrace{L^{-1}(w)})$ (L 1-1) $\Longrightarrow$ $H(w) = L^{-1}(w)$

$H \equiv L^{-1}$

② L^{-1} in lineerliği:

i) Her $w_1, w_2 \in W$ için

$$L^{-1}(w_1+w_2) = L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2) \quad \text{olmalı.}$$

L^{-1} in varlığından; L 1-1 ve örten.

L örtense $L(v_1)=w_1$ olacak ve

$L(v_2)=w_2$ olacak $v_1, v_2 \in V$ vardır.

$L^{-1}(w_1)=v_1$

$L^{-1}(w_2)=v_2$

$$L(v_1)+L(v_2) = w_1+w_2$$

$$L(v_1+v_2) = w_1+w_2$$

$$\underbrace{L^{-1}\circ L}_{I_V}(v_1+v_2) = L^{-1}(w_1+w_2)$$

$$(v_1+v_2) = L^{-1}(w_1+w_2)$$

$$v_1+v_2 = L^{-1}(w_1+w_2)$$

$$L^{-1}(w_1)+L^{-1}(w_2) = L^{-1}(w_1+w_2)$$

ii) $c \in \mathbb{R}$ ve $w_1 \in W$ alalım. ($\underline{L^{-1}(w_1) = v_1}$)

$$L^{-1}(c.w_1) = c.\, L^{-1}(w_1) \quad \text{(gösterilmeli)}$$

$$L(v_1) = w_1$$

$$c.L(v_1) = c.w_1$$

$$L(c.v_1) = c.w_1$$

$$L^{-1} \circ L(c.v_1) = L^{-1}(c.w_1)$$

$$c.v_1 = L^{-1}(c.w_1)$$

$$c.\, L^{-1}(w_1) = L^{-1}(c.w_1)$$

(i) ve (ii) den, L^{-1} lineer bir dönüşümdür.

3) $(L^{-1})^{-1} = L$:

$\underbrace{L}_{H} \circ L^{-1} = I_W$ ($H = (L^{-1})^{-1}$ alalım)

$L^{-1} \circ \underset{H}{L} = I_V$

$H \circ L^{-1} = I_W$ ve $L^{-1} \circ H = I_V$ (olsun istiyoruz.)

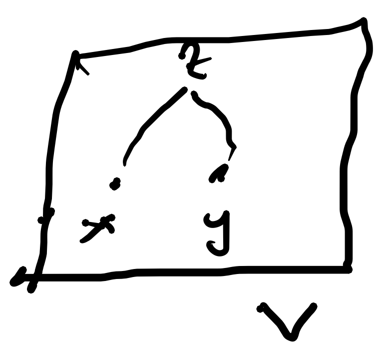
Yukarıdaki L, bu şartları sağlar.
Lineer dönüşümün tersinin tekliğinden;
L, (L^{-1})'in tersi olur.

Tanım: $L: V \to W$ 1-1 ve örten bir lineer dönüşüm ise L'ye V ve W arasında bir izomorfizm ve V ve W'ya izomorftur denir.

Hatırlatma: V ve W uzaylarının izomorf olması için gerek ve yeter şart,

$$\text{boy}(V) = \text{boy}\, W$$

olmasıdır.



Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlanan L lineer dönüşümünün çekirdeği $\text{çek}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ dir. (Alıştırma)

$\text{çek}(L) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow L$ birebirdir.

$\underbrace{\text{boy}(\mathbb{R}^3)}_{V} = \underbrace{\text{boy}(\mathbb{R}^3)}_{W} = 3$ $\quad$ L 1-1 olduğundan örtendir

L 1-1 örten olduğundan tersi vardır.

L^{-1} bulmak için: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ verildiğinde

$L^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = ?$ $\Leftrightarrow$ $L\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ sağlayan $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ bulunmalı.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ verilsin.} \qquad L\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \overset{-2s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2-2b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{(-s_3) \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2b_1-b_2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{-s_3+s_1 \\ -s_3+s_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_2-b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_3+b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b_1-b_2 \end{array}\right]$$

$$-s_2+s_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1-b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_3+b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b_1-b_2 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} \shortparallel \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 + b_2 - 2b_1 \\ 2b_1 - b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Teorem: Bir $L: V \to W$ lineer dönüşümünün 1-1 olması için gerek ve yeter şart V deki her lineer bağımsız kümenin görüntüsünün de W'da lineer bağımsız olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ L 1-1 olsun ve V'de lineer bağımsız bir $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ lin. bağımsız kümesi alalım.

$L(S)=\{L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_k)\}$ W'da lineer bağımsız?

$a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \ldots + a_k L(v_k) = 0_W$ olsun.

$\Rightarrow$ $L(\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k}) = 0_W$

$0_V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k \in$ çek$(L) = \{0_V\}$ (L 1-1)

$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ $\quad$ $L(S)$ lin. bğsız.

$(\Leftarrow)$ V'deki her lin. bağımsız S kümesi için $L(S)$, W'da lin. bağımsız olsun.

$u \in V$ ve $\underline{u \neq 0_V}$ olsun. $\left(\boxed{c \cdot u = \vec{0}} \Rightarrow c = 0 \ \cancel{\vee\ u = \vec{0}} \right)$

$S = \{u\}$, lineer bağımsızdır.

$L(S) = \{L(u)\}$ lineer bağımsız.

$L(u) \neq 0_W$

$u \neq \vec{0}_V \Rightarrow L(u) \neq \vec{0}_W$

$\Rightarrow \text{çek}(L) = \{0_V\}$

$\Rightarrow L$ 1-1

A $n \times n$ olmak üzere $\quad L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\qquad x \mapsto A \cdot x$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşümü için

$$\text{boy}\, L(V) = \text{rank}(A) \quad \text{olur.}$$

$$L_A(V) = \{ A \cdot x : x \in V \} \qquad A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$= \underline{A\text{'nın sütun uzayı}}$

$$\text{boy}(L_A(V)) = \text{boy}(A \text{ nın sütun uzayı})$$
$$\text{boy}\, L_A(V) = \text{rank}(A)$$

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto A \cdot x$$

L_A örtense $\text{boy}\, L_A(\mathbb{R}^n) = n = \text{rank}(A)$

$\text{boy}(\text{çek}\, L_A) = 0$ ve L_A 1-1 olur.

$A \cdot X = 0$ (homojen denkl. sisteminin sadece aşikâr çözümü $X = \vec{0}$ vardır.)

Uyarı 1: $L: V \to W$ lin. dönş. boy V = boy $W = n$ ise aşağıdakiler birbirine denktir:

1) L'nin tersi vardır.

2) L 1-1 dir.

3) L örtendir. *

Uyarı: Aşağıdakiler denktir: (A $n \times n$)

1) A sing. değildir.
2) $AX = 0$ sist.nin yalnızca aşikar çözümü vardır.
3) $A \sim I_n$
4) Her b için $AX = b$ nin tek çözümü vardır.
5) A elementer matrislerin çarpımıdır.
6) $\operatorname{rank}(A) = n$
7) $\det(A) \neq 0$
8) $L(x) = Ax$ lin. dönüşümü 1-1 ve örtendir.