1. Lineer Dönüşümler:

S, n boyutlu V uzayının bir sıralı bazı;

$u, v \in V$ için i) $[u+v]_S = [u]_S + [v]_S$

ii) $[k.u]_S = k.[u]_S$

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

ii) $f(k.u) = k.f(u)$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Tanım: V ve W birer vektör uzayı ve $L: V \to W$ bir fonksiyon olsun. Eğer L aşağıdakileri sağlıyorsa, L'ye V den W'ya bir lineer dönüşüm denir.

1) Her $u, v \in V$ için $L(u+v) = L(u) + L(v)$

2) Her $k \in \mathbb{R}$, $u \in V$ için $L(k.u) = k.L(u)$

Eğer $V = W$ ise $L: V \to V$ lineer dönüşümüne V üzerinde bir lineer operatör denir.

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$ ile tanımlanan L

bir lineer dönüşümdür ✓

1) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için

$$L\left(\underline{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}\right) = L\left(\begin{bmatrix} a+x \\ b+y \\ c+z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+x \\ b+y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \underline{L\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} + \underline{L\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

2) $k \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ için

$$L\left(\underline{k\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}\right) = L\left(\begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ka \\ k.b \end{bmatrix} = k.\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underline{k.L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)}$$

Örnek: $L: P_1 \to P_2$ dönüşümü lineer midir?

$$p(t) \mapsto t.p(t)$$

1) $p(t), q(t) \in P_1$

$$L(p(t)+q(t)) = t(p(t)+q(t))$$

$$= \underline{t.p(t)} + \underline{t.q(t)} = L(p) + L(q)$$

2) $k \in \mathbb{R}$, $p(t) \in P_1$

$$L(k.p(t)) = t.(k.p(t)) = k.(\underbrace{t.p(t)})$$

$$= k.L(p(t))$$

L lineer bir dönüşümdür.

Örnek: $r \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun.

$$L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = r.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan L lineer bir dönüşümdür.

1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ alalım.

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}\right) = r.\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= r.\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{r.\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}} + r\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

2) $c \in \mathbb{R}$ ve $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{L\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)} = L\left(\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}\right) = r.\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix} = r.c.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c.\begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{bmatrix}$$

$$= c.L\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Örnek: V, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tüm türevlenebilir fonks. lar

W, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tüm fonksiyonlar

vektör uzayları arasında tanımlanan

$$L : V \to W, \quad f \mapsto (f')$$

dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

1) $f, g \in V$ alalım.

$$L(f+g) = (f+g)' = f' + g' = L(f) + L(g)$$

2) $k \in \mathbb{R}$ ve $f \in V$ olsun;

$$L(k.f) = (k.f)' = k.(f') = k.L(f)$$

$\Rightarrow$ L bir lineer dönüşümdür.

Örnek: A $m\times n$ tipinde bir matris olsun.

$$A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = (Ax)_{m\times 1}$$

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto A \cdot x$$

ile tanımlanan L, bir lineer dönüşümdür.

1) $x, y \in \mathbb{R}^n$ alalım.

$$L(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = L(x) + L(y)$$

2) $k \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$L(k \cdot x) = A \cdot (\underset{=}{k} \cdot x) = k \cdot (Ax) = k \cdot L(x)$$

L lineerdir.

Alıştırma: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ dönüş. lineer midir?

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+1 \\ 2b \\ c \end{bmatrix}$

fonks. lineer midir?

1) $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ alalım. $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\right) =$

$= L\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}\right) = \boxed{\begin{bmatrix} a_1+a_2+1 \\ 2(b_1+b_2) \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}}$

$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+1 \\ 2b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+1 \\ 2b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$= \boxed{\begin{bmatrix} a_1+a_2+2 \\ 2(b_1+b_2) \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}}$

$\neq$

L lineer değildir.

Örnek: $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ 2 \cdot a_2 \end{bmatrix}$ dönüşümü lineer midir?

1) $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)^2 \\ 2(a_2+b_2) \end{bmatrix}$$

$\neq$

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ 2a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 \\ 2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 \\ 2(a_2+b_2) \end{bmatrix}$$

L lineer değildir

2) $k \in \mathbb{R}$ ve $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$L\left(k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} k a_1 \\ k a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (k \cdot a_1)^2 \\ 2k \cdot a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 \cdot a_1^2 \\ 2(k\, a_2) \end{bmatrix}$$

$$k \cdot L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = k \cdot L\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} a_1^2 \\ 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_1^2 \\ k \cdot 2 \cdot a_2 \end{bmatrix}$$

L lin. değ.

Teorem: $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda

a) $L(0_V) = 0_W$

b) Her $u, v \in V$ için $L(u-v) = L(u) - L(v)$ dir.

İspat: a) $\cancel{L(0_V)} = L(0_V + 0_V) = \cancel{L(0_V)} + L(0_V)$

$$L(0_V) = 0_W$$

b) $L(u-v) = L(u + (-1) \cdot v)$

$= L(u) + L((-1) \cdot v)$

$= L(u) + (-1) \cdot L(v)$

$= L(u) - L(v)$

Teorem: V n boyutlu bir vektör uzayı ve $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ V'nin bir bazı olsun. W herhangi bir vektör uzayı ve $L: V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

V deki her u vektörü için $L(u)$ değeri, $\{L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)\}$ kümesi ile tek türlü belirlenir.

İspat: $u \in V$ ve S, V nin bir baz.

$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n . v_n$ olacak şekilde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ var. (tek türlü belirli)

$$L(u) = L(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n)$$
$$= L(a_1 v_1) + L(a_2 v_2) + \ldots + L(a_n . v_n)$$
$$= a_1 \underline{L(v_1)} + a_2 \underline{L(v_2)} + \ldots + a_n . \underline{L(v_n)}$$

Böylece $L(u)$, $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ ile belirlenmiş olur.

$\square$