$L: V \to W$ bir lineer dönüşüm

$\text{çek}(L) = \{ v \in V : L(v) = 0_W \} \subseteq V$

T: $L: V \to W$ lin. dönüş.

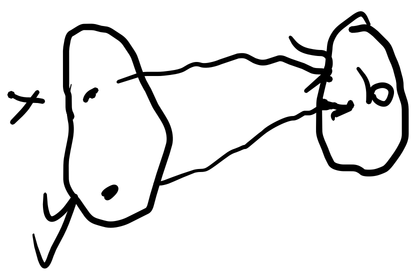
1) $\text{çek}(L) \subseteq V$ alt uzaydır.

2) L birebir $\iff \text{çek}(L) = \{0_V\}$

Sonuç: $L(x)=b$ ve $L(y)=b$ ise

$$L(x)-L(y)=L(x-y)=b-b=0_W$$

$\Rightarrow$ $\underline{x-y} \in \text{çek}(L)$ olur.



$x-y=u \in \text{çek}(L)$

$x=y+u$

$=$ $\cancel{y}$

Örnek: $L : P_2 \to \mathbb{R}$; $L(at^2+bt+c) = \int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt$

lineer dönüşüm için:

a) $\text{Çek}(L) = ?$ $\quad p(t) = at^2+bt+c \in \text{Çek}(L)$ alalım.

$\Leftrightarrow L(p(t)) = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}\cdot t^2 + c.t\right]_0^1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$

$\Leftrightarrow 2a + 3b + 6c = 0$

$c = \frac{-2a-3b}{6}$

$p(t) = a.t^2 + bt + \left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)$

$= a\underbrace{\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)}_{v_1} + b\underbrace{\left(t - \frac{1}{2}\right)}_{v_2}$

$\text{Çek}(L) = \text{Ger}\underbrace{\left\{t^2 - \frac{1}{3},\ t - \frac{1}{2}\right\}}_{\text{Baz}}$

b) boy çek$(L) = 2$

c) L birebir midir?

çek$(L) \neq \{0\}$ olduğu için L 1-1 değil.

Tanım: $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. W'nun

$$L(V) = \{ L(v) : v \in V \} \subseteq W$$

alt kümesine L'nin görüntü kümesi denir.

$* \underline{w} \in L(V) \Leftrightarrow L(\underline{v}) = w$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır.

Eğer $L(V) = W$ ise L'ye örten bir lin. dönüşümdür denir.

Teorem: $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $L(V)$, W nun bir alt uzayıdır.

İspat: w_1 ve $w_2 \in \underline{L(V)}$ alalım.

$\Leftrightarrow$ $w_1 = L(v_1)$, $w_2 = L(v_2)$ olacak şekilde $v_1, v_2 \in V$

vardır.

i) $w_1 + w_2 = L(\overset{?}{\ })$

$$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(\underbrace{v_1 + v_2}) \in L(V)$$

ii) $c \in \mathbb{R}$ ve $w_1 \in L(V)$ alalım.

$c \cdot w_1 \overset{?}{\in} L(V)$

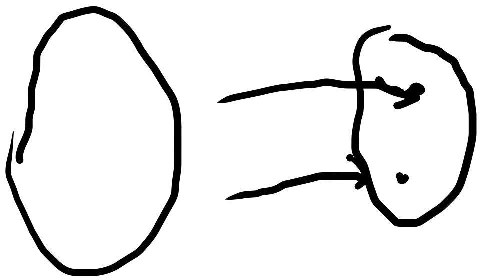
$$\underline{c \cdot w_1} = c \cdot L(v_1) = L(c \cdot v_1) \in L(V) \Rightarrow L(V)$$

w nun alt uzayıdır.

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

lineer dönüşümü örten midir? $\left(L(V) = W = \mathbb{R}^2 \right)$



$\mathbb{R}^2$ deki her eleman $\mathbb{R}^3$ teki bir vektörün görüntüsü müdür?

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in W$ için $L\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ olacak

$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ var mıdır?

$$\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow L$ örtendir.

Örnek: $L: P_2 \to \mathbb{R}$, $L(at^2+bt+c) = \int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt$

örten midir?

$$L(P_2) \overset{?}{=} \mathbb{R}$$

Her $z \in \mathbb{R}$ için $L(at^2+bt+c) = z$ olacak şekilde $at^2+bt+c \in P_2$ var mıdır?

$$L(at^2+bt+c) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = z$$

$\Rightarrow c = z$ ise $\int_0^1 (z)\,dt$

$a=0, b=0$ $= z$

olduğundan L örtendir.

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

lin. döns. veriliyor.

a) L örten midir?

Her $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ için $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ olacak şekilde

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ var midir? $\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(Bilinmeyenler: a, b, c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \end{array}\right] \underset{-2S_1+S_3}{\overset{-S_1+S_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & z-2x \end{array}\right] \overset{-S_2+S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & -y-x+z \end{array}\right]$$

$\neq 0$

$z-x-y \neq 0$ için çözüm yoktur. $\Rightarrow L$ örten değildir.

$$L(V) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z - x - y = 0 \right\}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} = x \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + y \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

$\downarrow$

Görüntü küm. elemanları

$$L(\mathbb{R}^3) = \text{Ger} \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{Baz}}$$

$$\text{boy } L(V) = 2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

A sağından bir sütun vektörü ile çarpıldığında, A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi alınıyordur.

$$A \cdot \alpha = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{R}^3)$$

$$L(\mathbb{R}^3) = \text{Ger}\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Baz bulmak için:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1. & 2. & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Baz} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) L $\underline{1}-\underline{1}$ midir?

$$L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$L \ \ \underline{1}-\underline{1} \iff \text{çek}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \text{çek}(L) \iff A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$b = -c$

$a = -c$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \text{çek}(L) \iff \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ c \end{bmatrix} = c \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Baz(çek)}}$$

$\text{boy çek}(L) = 1$

$\Rightarrow L$ birebir değildir.

Örnek: $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ a_3+a_4 \\ a_1+a_3 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlanan L nin görüntüsü için $(L(\overset{\mathbb{R}^4}{V}))$ bir baz bulunuz.

Görüntüdeki herhangi bir vektör:

$$\underline{\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ a_3+a_4 \\ a_1+a_3 \end{bmatrix}} = a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L(V) = \text{Ger}\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{-S_1+S_3 \to S_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-S_2) \leftrightarrow S_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Gen}\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Baz} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Teorem: $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm ve

$boy(V) = n$ ise

$$boy\, çek(L) + boy\, L(V) = n = boy(V)$$

İspat: $boy\, çek(L) = k$ diyelim.

i) $k = n = boy(V) \Leftrightarrow$ her $v \in V$ için $L(v) = 0_W$

↳ $çek(L) = V$

$$\underbrace{boy\, çek(L)}_{n} + \underbrace{boy\, L(V)}_{0} = n = boy(V)$$

✓

ii) $0 < k < n$ olsun.

boy $\text{çek}(L) = k \iff \text{çek}(L)$ nin bir bazı

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ gibidir.

Lineer bağımsız her alt küme uzay için

baz olacak şekilde genişletilebildiğinden;

$\{\underline{v_1, v_2, \dots, v_k}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ V nin bir bazı olsun.

$\Rightarrow w \in L(V)$ için

$$w \equiv \underbrace{a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \dots + a_k L(v_k)}_{0_W}$$

$$+ a_{k+1} L(v_{k+1}) + \dots + a_n L(v_n)$$ şeklindedir.

$\Rightarrow \quad w = a_{k+1} L(v_{k+1}) + a_{k+2} L(v_{k+2}) + \dots + a_n L(v_n)$

$\Rightarrow \{ L(v_{k+1}), L(v_{k+2}), \dots, L(v_n) \}$ kümesi $L(V)$'yi gerer.

iddia: $\{ L(v_{k+1}), \dots, L(v_n) \}$ kümesi lineer bağımsızdır.

$$b_{k+1} L(v_{k+1}) + b_{k+2} L(v_{k+2}) + \dots + b_n L(v_n) = 0_w$$

alalım.

$$L \text{ lineer} \Rightarrow L(b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n v_n) = 0_w$$

$$b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n v_n \in \text{çek}(L)$$

$$b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n v_n = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$$

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k - b_{k+1} v_{k+1} - \dots - b_n v_n = 0_v$$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ V için bir baz

$\Rightarrow$ lin. bağımsız.

$$c_1 = \cdots = c_k = \underbrace{b_{k+1} = \cdots = b_n}_{} = 0$$

$L(v_{k+1}), \ldots, L(v_n)$ in katsayıları

$\Rightarrow \{L(v_{k+1}), \ldots, L(v_n)\}$, $L(V)$ için bir bazdır.

$$\text{boy}\, L(V) = n-k$$

$$\text{boy}\, \text{çek}(L) + \text{boy}\, L(V) = k + n - k = n$$

$\downarrow$

boy V

iii) $k = \text{boy } \text{çek}(L) = 0$ ise

$\Rightarrow n = \text{boy}(V)$ için

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ V nin bir bazı olarak alınır.

Yukarıdakine benzer şekilde

$\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ kümesinin $L(V)$ için bir baz olduğu gösterilir (Alıştırma)

$$\text{boy } \text{çek}(L) + \text{boy } L(V) = 0 + n = n = \text{boy } V$$

Tanım: $L: V \to W$ lin. dönş. verildiğinde boy çek(L)'ye L'nin sıfırlığı denir.

Örnek: $L: P_2 \to P_2$, $L(\underline{a}t^2+\underline{b}t+\underline{c}) = (a+2b).t + b+c$ lin. dönş. veriliyor;

a) $\underline{\text{çek}(L)}$ için bir baz bulunuz.

$\underbrace{at^2+bt+c}_{p(t)} \in \text{çek}(L) \Leftrightarrow L(p(t)) = 0$

$0 = (a+2b).t + (b+c)$

$a+2b=0$

$b+c=0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$b=-c$

$a=-2b=2c$

$p = at^2+bt+c = 2c.t^2 - c.t + c = c.(2t^2 - t + 1)$

$\{2t^2 - t + 1\}$, Çek(L) nin bir bazıdır.

$$Çek(L) = \{c.(2t^2 - t + 1) : c \in \mathbb{R}\}$$

b) $L(P_2)$ için bir baz bulunuz.

$$L(at^2 + bt + c) = (a+2b).t + b + c \in L(V)$$

$$(a+2b)t + b + c = a.t + b.(2t+1) + c.1$$

$$L(V) = Ger\{t, 2t+1, 1\}$$

$\{t, 2t+1\}$ l.in bağımsızdır. Baz $= \{t, 2t+1\}$

$$1 = (-2).(t) + 1.(2t+1) = 1 \quad (\{t, 1\}, \{2t+1, 1\})$$