* V, W vektör uzayları;

$L : V \to W$ bir fonks.

1) Her $u, v \in V$ için

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

2) Her $c \in \mathbb{R}$, $u \in V$ için

$$L(c.u) = c.L(u)$$

ise L <u>lineer</u> dönüşümdür.

** V nin bir bazı $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ise V'nin görüntü kümesi $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ ile belirlenir.

Örnek: $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ bir lineer dönüşüm;

$v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,-1,2)$, $v_3 = (0,2,2,1)$,

$v_4 = (1,0,0,1)$ olmak üzere $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$\mathbb{R}^4$ ün bir bazı; $L(v_1) = (1,2)$, $L(v_2) = (0,3)$,

$L(v_3) = (0,0)$, $L(v_4) = (2,0)$ ise

$v = (3,-5,-5,0)$ vektörünün görüntüsü $L(v) = ?$

$v = (3,-5,-5,0) = 2.v_1 + v_2 - 3v_3 + v_4$ (Alıştırma)

$$
\begin{aligned}
L(v) &= L(2v_1 + v_2 - 3v_3 + v_4) \\
&= L(2v_1) + L(v_2) + L(-3v_3) + L(v_4) \\
&= 2.L(v_1) + L(v_2) - 3L(v_3) + L(v_4) \\
&= 2.(1,2) + (0,3) - 3(0,0) + (2,0)
\end{aligned}
$$

$L(v) = (4,7)$ //

Teorem: $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^n$ in standart bazı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olmak üzere

A, $m \times n$ tipinde ve j. sütunu $[L(e_j)]$ olan matris olsun. Her $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ için

$$L(x) = A \cdot x$$ sağlanır.

A matrisi bu şartı sağlayan tek matristir. A'ya L'nin standart baza göre temsilci matrisi denir.

İsp: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ise $x = x_1 . e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n . e_n$

$$L(x) = \underline{x_1 . L(e_1) + x_2 . L(e_2) + \dots + x_n L(e_n)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L(e_1) \vdots L(e_2) \vdots \dots \vdots L(e_n) \end{bmatrix}}_{A} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A . x = L(x)$$

A'nın tekliği: Bir B $(m \times n)$ için $L(x) = B . x$ sağlansın. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$A . x = L(x) = B . x \quad \text{olur.}$$

$$A . e_1 = L(e_1) = B . e_1$$

$$A . \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = L(e_1) = B . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ A'nın 1. sütunu = B'nin 1. sütunu

Her j için $A . e_j = B . e_j \Rightarrow A$'nın j. sütunu

$= B$'nin j. sütun.

$A = B$. elde edilir.

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlanan L'nin standart baza göre temsilci matrisini bulunuz.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ $\mathbb{R}^3$ ün sıralı bazı.

$$A = \left[L(e_1) \vdots L(e_2) \vdots L(e_3) \right]$$

$$L(e_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(e_2) = L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L(e_3) = L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3+2\cdot(-2) \\ 3\cdot(-2)-2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

lineer dönüşümünün standart baza göre temsilcisini bulunuz.

$$A = \left[L(e_1) \,\vdots\, L(e_2) \,\vdots\, L(e_3) \right]$$

$$= \left[L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vdots\, L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \vdots\, L\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad A \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x) = r \cdot x$ (r; verilmiş olsun.)

$$A = \left[L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Örnek: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$

lin. dön.nün st. baz temsilcisi?

$$A = \left[L(e_1) \mid L(e_2) \right] = \left[L\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, L\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünün standart baza göre temsilcisi $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

olsun.

a) $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = ?$ Her $x \in \mathbb{R}^3$ için $L(x) = A \cdot x$

$$L\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

b) $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = ? = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 + 2a_3 \\ -2a_1 + a_2 + 3a_3 \\ a_1 + 2a_2 - 3a_3 \end{bmatrix}$

Örnek: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

yukarıdakileri sağlayan lineer dönüşüm için

a) $L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = ?$ b) $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = ?$

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ için bir sıralı bazdır.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 - a_2 = -1$$
$$a_1 + a_2 = 5$$

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot L\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = ?$

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

x ve y için çözüm?

$$x - y = a_1$$
$$x + y = a_2$$

$$x = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} - a_1 = \frac{a_2 - a_1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \cdot L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{a_2-a_1}{2}\right) \cdot L\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \left(\frac{a_2-a_1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \left(\frac{a_2-a_1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_1+a_2}{2} + a_2 - a_1 \\ -a_1 - a_2 + \frac{3a_2-3a_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a_2-a_1}{2} \\ \frac{-5a_1+a_2}{2} \end{bmatrix}$$

Örnek: $L : P_2 \to P_3$; $L(1) = 1$, $L(t) = t^2$, $L(t^2) = t^3 + t$

sağlayan L lin. dönüşümü için

a) $L(2t^2 - 5t + 3) = ?$

b) $L(at^2 + bt + c) = ?$

$L(2t^2 - 5t + 3)$

$= 2 \cdot L(t^2) - 5 \cdot L(t) + 3 \cdot L(1)$

$= 2(t^3 + t) - 5 \cdot t^2 + 3 \cdot 1$

$= 2t^3 - 5t^2 + 2t + 3$

Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntü Kümesi

Tanım: $L : V \to W$ lineer dönüşümü 1-1 ise L'ye bir 1-1 lin. dönş. denir.

Kriter: $L(u) = L(v)$ sağlanan her $u, v \in V$ için $u = v$ ise L 1-1 dir.

$$L(u) = L(v) \implies u = v.$$

Örnek: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix}$

lin. dön. 1-1 midir?

$u = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ için $L(u) = L(v)$

$\overset{?}{\Rightarrow} u = v$

$$L(u) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} = L(v)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \\ a_1 - a_2 = b_1 - b_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2a_1 = 2b_1 \Rightarrow a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{array}$$

$\Rightarrow u = v$ ✓

L 1-1 dir.

Örnek: $L\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

dönüşümü 1-1 midir?

$u = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ için $L(u) = L(v)$ olsun.

$L(u) = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} = L(v) \longrightarrow$ $a_1 = b_1$

$a_2 = b_2$ ✓

ise $u \overset{?}{=} v$ $\qquad$ $a_3 \ ? \ b_3$

$\underset{u}{L\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underset{v}{L\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}}$ ve $u \neq v$

L 1-1 değildir.

Tanım: $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. L nin çekirdeği $L(u) = 0_W$ sağlayan $u \in V$ vektörlerinin kümesidir.

$$\text{çek}(L) = \{ u \in V : L(u) = 0_W \}.$$

Not: Her $L: V \to W$ için
$$L(0_V) = 0_W$$ olduğundan

çek(L) hiçbir zaman boş küme değildir.

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

için çek$(L) = ?$

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

$$\text{çek}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Teorem: $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.
Bu durumda:
a) $çek(L)$, V'nin bir alt uzayıdır.

b) L nin 1-1 olması için gerek ve yeter şart $çek(L) = \{0_V\}$ olmasıdır ?

İspat: a (i) $u, v \in çek(L)$ alalım. $(u+v) \in çek(L)$

$L(u) = L(v) = 0_W$; $L(u+v) = L(u) + L(v) = 0_W + 0_W$

$L(u+v) = 0_W$

$\Rightarrow u+v \in çek(L)$ ✓

(ii) $c \in \mathbb{R}$ ve $\underbrace{u \in çek(L)}_{L(u) = 0_W}$ ise $(c.u) \overset{?}{\in} çek(L)$

$L(c.u) = c \cdot L(u) = c \cdot 0_W = 0_W \Rightarrow c.u \in çek(L)$

$\Rightarrow$ çek(L), V nin bir alt uzayıdır.

(b) ($\Rightarrow$) L birebir olsun.

$$\underbrace{u \in \text{çek}(L)}_{} \Rightarrow u = 0_V$$

$$\underline{L(u)} = 0_W = \underline{L(0_V)}$$

$\overset{L \text{ birebir}}{\Rightarrow}$ $u = 0_V$

($\Leftarrow$) çek(L) $= \{0_V\}$ olsun.

$$L(u) = L(v) \quad \left(\overset{?}{\Rightarrow} u = v \right)$$

$$L(u) - L(v) = 0_W$$

$$L(\underline{u - v}) = 0_W$$

çek(L) $\ni u - v = 0_V \Rightarrow u = v \Rightarrow$ L 1-1 V.