Bir Lineer Dönüşümün Matris Temsilcileri:

Teorem: $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm, boy $V = n$ ve boy $W = m$ olsun. $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ve $T = \{w_1, \ldots, w_m\}$ sırasıyla V ve W nun sıralı bazları olsun. Bu durumda j. sütununda $[L(v_j)]_T$ vektörü bulunan A matrisine L nin S ve T bazlarına göre temsilcisi denir. A matrisi; her $v \in V$ için

$$[L(v)]_T = A . [v]_S$$

eşitliğini sağlar. A bu özellikteki tek matristir.

$L: V_S \longrightarrow W_T \qquad A.[v]_S = [L(v)]_T$

$v \longmapsto L(v)$

İspat: $v \in V$ vektörünün S bazına göre koordinat vektörü $[v]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ olsun.

$\Leftrightarrow \quad v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \qquad v_i \in S \; ; \; a_j \in \mathbb{R}$

$L(v) = a_1L(v_1) + a_2L(v_2) + \dots + a_nL(v_n) \in W$

$[L(v)]_T = a_1[L(v_1)]_T + \dots + a_n[L(v_n)]_T$

$= \left[[L(v_1)]_T \,\vdots\, \dots \,\vdots\, [L(v_n)]_T \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} [u+v]_T &= u_T + v_T \\ [c.u]_T &= c.u_T \end{aligned}$

$[L(v)]_T = A.[v]_S.$ $\square$

A nın tekliği: Bir başka matris B için;

her $v \in V$ için $[L(v)]_T = B \cdot [v]_S$ olsun.

$v = v_1 \in S$ $\qquad [L(v_1)]_T = B \cdot [v_1]_S$

$$[v_1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [L(v_1)] = \underbrace{B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{B \text{ nin } 1. \text{ sütunu}} = \underbrace{A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{A \text{ nın } 1. \text{ sütunu}}$$

v_i . . .

$\Rightarrow A = B$

Örnek: $L: P_2 \to P_1$, $L(p(t)) = p'(t)$ ile tanımlansın. $S = \{t^2, t, 1\}$ ve $T = \{t, 1\}$; P_2 ve P_1 in sıralı bazlarına göre L nin temsilcisi?

$$A = \left[[L(v_1)]_T \;\vdots\; [L(v_2)]_T \;\vdots\; [L(v_3)]_T \right]$$

$$= \left[[L(t^2)]_T \;\vdots\; [L(t)]_T \;\vdots\; [L(1)]_T \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$L(t^2) = 2t$; $[L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad 2t = 2.t + 0.1$

$L(t) = 1$; $[L(t)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad 1 = 0.t + 1.1$

$L(1) = 0$; $[L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$p(t) = 5t^2 - 3t + 2 \cdot 1$ ise $L(p)$ yi A matrisinden yararlanarak bulunuz.

$$[p]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[L(p)]_T = A \cdot [p]_S$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$[L(p)]_T = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$L(p) = 10 \cdot t + (-3) \cdot 1 = 10t - 3$$

$$\left[(p(t))' = 10t - 3 \right]$$

sağlama

Örnek: L yukarıdaki gibi olsun. P_2 nin sıralı bazı $S=\{t^2, t, 1\}$, $T=\{t+1, t-1\}$ olsun.

a) L nin S ve T sıralı bazlarına göre temsilcisi?

b) $p(t) = 6t^2-2t+4$ için $L(p)$ yi A'yı kullanarak bulunuz.

a) $L(t^2) = 2t$

$$[L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[L(t)]_T = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$[L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1(t+1) + a_2(t-1) = 2t$$

$$(a_1+a_2)t + \underbrace{a_1-a_2}_{0} = 2t$$

$$a_1(t+1) + a_2(t-1) = 1$$

$$a_1 - a_2 = 1$$

$$a_1 = -a_2$$

$$a_2 = \frac{-1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

(b) $p(t) = 6t^2 - 2t + 4$

$$[p(t)]_S = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[L(p)]_T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & +1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = [L\,p]_T$$

$L(p) = 12t - 2$

$5 \cdot (t+1) + 7 \cdot (t-1)$

$= 12t - 2$

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

ile tanımlansın. S ve T, sırasıyla $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ nin standart bazları olmak üzere L nin S ve T ye göre temsilcisini bulunuz.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ yukarıdaki dönüşüm;

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ve $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

olmak üzere L nin S ve T ye göre temsilcisi?

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 3a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$a_2 = -1$

$a_1 = 3$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$a_1 + a_2 = 2$

$2a_1 + 3a_2 = 5$

$a_2 = 1$

$a_1 = 1$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=a_1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+a_2\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\2a_1+3a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right]_T=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$a_2=1$

$a_1=0$

L nin S ve T ye göre temsilcisi;

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$ olur.

$v=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\in R^3$ için $L(v)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}5\\11\end{bmatrix}}$

$$[v]_S=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow 1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=v$$

$$[L(v)]_T=A\cdot[v]_S=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=[L(v)]_T$$

$$L(v)=4\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}5\\11\end{bmatrix}}$$

Uyarı: n boyutlu V uzayından,
n boyutlu W uzayına tanımlı bir
L lineer dönüşümü için aşağıdakiler denktir.

1) L birebirdir
2) L örtendir
3) L'nin tersi vardır.
4) V ve W nun iki sıralı bazına göre L nin temsilcisi singüler olmayan bir matristir

L^{-1} - $L(x) = y$

$(L^{-1} \circ L)(x) = x$

$A[x]_S = [y]_T$

$(\underbrace{B \cdot A}) [x]_S = B[y]_T$

$I \cdot [x]_S = B[y]_T$

Örnek: $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}$

verilıyor. a) S ve T sırasıyla $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^3$ ün standart sıralı bazları ise L nın S ve T ye göre temsilcisi?

$$L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$L\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) $S' = \{ \overset{v_1}{(1,0,0,1)^T}, \overset{v_2}{(0,0,0,1)^T}, \overset{v_3}{(1,1,0,0)^T}, \overset{v_4}{(0,1,1,0)^T} \}$

$T' = \{ \underset{u_1}{(1,1,0)^T}, \underset{u_2}{(0,1,0)^T}, \underset{u_3}{(1,0,1)^T} \}$

$$L(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L(v_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(v_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -S_3+S_1 \\ S_3+S_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 'ün değerini A'yı kullanarak bulunuz.

Tanımdan

$L(v) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$a_1 \to 0 \qquad a_2 \to 0$

$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$[L(v)]_{T'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

A yı kullanarak

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to a_1 = 0 \\ \to a_3 = 2 \\ \to a_4 = -1 \\ \quad a_2 = 3 \end{array}$

$[v]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$[L(v)]_T = A \cdot [v]_S$

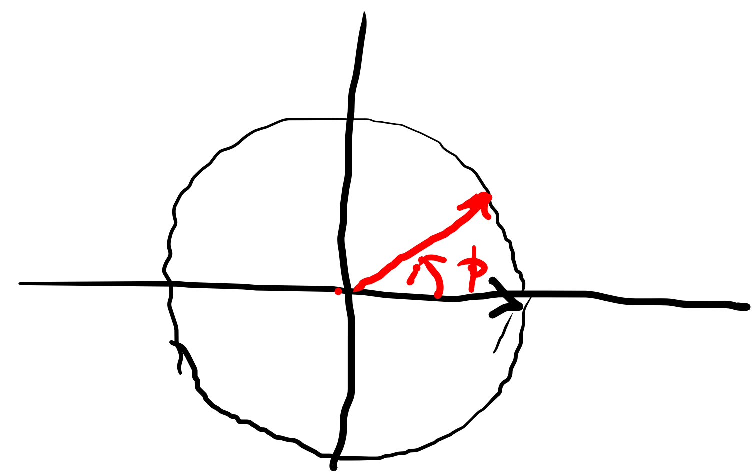
$$[L(v)]_T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(v) = 0 \cdot \underset{u_1}{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}} + 0 \cdot \underset{u_2}{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}} + 2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[L(v)]_T = A \cdot [v]_S.$$

Örnek: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, bir vektörü orjin etrafında ϕ açısı kadar döndürme dönüşümünün $\mathbb{R}^2$ nin standart bazına göre temsilcisini bulunuz.

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$



$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$